OliCyber.IT 2025 - Selezione Scolastica
Soluzioni commentate

Contenuti

1 Domanda 1

1.1 Domanda

Considera la seguente funzione.

```
function encrypt(m, len):
  for i = 0,1,...,len-1:
    m[i] = chr((ord(m[i]) + ord(m[(i+1)%len])) % 26)
  return m
```

Dove `ord` è la funzione che mappa A a 0, B a 1 e così via, mentre `chr` è la sua funzione inversa. Quante possibili stringhe `m` (anche senza senso) ci sono tali che `encrypt(m, 5) = "AAAAA"`?

1.2 Risposte

(A) `1`

(B) `2`

(C) `13`

(D) `26`

1.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(A) 1`.

Chiamiamo c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 i caratteri della string in input alla funzione `encrypt`. Notiamo che all'interno del ciclo `for`, la stringa `m` viene modificata lettera per lettera, quindi all'ultima iterazione il valore di `m[(i+1)%len] = m[0]` sarà `A`. Abbiamo dunque l'equazione `0 = ord('A') = ord(`c_4`) + ord('A')`, che determina c_4 `= 'A'`. Ripetendo il ragionamento a ritroso otteniamo la stessa equazione anche per gli altri caratteri, determinando quindi $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ `= 'A'`.

Infine è immediato vedere infatti che `encrypt("AAAAA", 5) = "AAAAA"`. Abbiamo quindi una e una sola stringa `m` tale che `encrypt(m, 5) = "AAAAA"`.

2 Domanda 2

2.1 Domanda

Ti trovi su un'isola abitata solo da hacker. Gli hacker possono essere hacker *white-hat*, che dicono sempre la verità, o hacker *black-hat*, che mentono sempre. Incontri due donne che vivono sull'isola e chiedi alla più anziana "Siete entrambe hacker *white-hat*?". Lei risponde "Sì" o ""No", ma non hai abbastanza informazioni per determinare che tipo di hacker siano. Quindi chiedi alla più giovane "Siete hacker dello stesso tipo?". Lei risponde "Sì" o "No" e a questo punto sai dire esattamente che tipo di hacker sono le donne. Di che tipo sono?

2.2 Risposte

(A) Entrambe white-hat

(B) Entrambe black-hat

(C) La più anziana white-hat, la più giovane black-hat

(D) La più anziana black-hat, la più giovane white-hat

2.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(A) Entrambe white-hat`.

Consideriamo i 4 casi in cui le due donne siano, ognuna, *white-hat* o *black-hat*. Compiliamo quindi una tabella dove l'intestazione in alto si riferisce alla donna più anziana e l'intestazione a sinistra a quella più giovane, mentre in ogni cella della tabella, per ognuna delle due domande, c'è un segno ✓se la risposta è "Sì", o un segno ✗.

	WH	BH
WH	✓✓	✓✗
BH	✗✓	✓✗

Analizziamo i vari casi:

- Entrambe white-hat: non ci sono contraddizioni
- Entrambe black-hat: lo scenario non è distinguibile dall'ultimo caso
- La più anziana white-hat, la più giovane black-hat: lo scenario è distinguibile già alla prima domanda, contraddicendo le ipotesi del testo
- La più anziana black-hat, la più giovane white-hat: lo scenario non è distinguibile dal secondo caso

Risulta quindi che la prima opzione è l'unica che concorda con le ipotesi, ed è quindi quella corretta.

3 Domanda 3

3.1 Domanda

Un padre lascia la sua eredità ai suoi figli. I soldi vengono divisi nel seguente modo:

- 1000 più 1/10 del denaro rimanente al primo figlio
- 2000 più 1/10 del denaro rimanente al secondo figlio
- 3000 più 1/10 del denaro rimanente al terzo figlio
- e così via...

Quanti sono i figli sapendo che tutti hanno ricevuto la stessa quantità di denaro e che tutti i soldi sono stati distribuiti a loro?

3.2 Risposte

(A) 9

(B) 10

(C) 20

(D) 7

3.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(A) 9`.

Chiamiamo S la somma totale di denaro che il padre lascia in eredità.

Il primo figlio riceverà $x_1 = 1000 + \frac{S - 1000}{10} = 900 + \frac{S}{10}$ e la somma rimanente sarà $S - x_1 = \frac{9S}{10} - 900$.

Il secondo figlio riceverà $x_2 = 2000 + \frac{(S - x_1) - 2000}{10} = 1710 + \frac{9S}{100}$.

Poichè tutti i figli ricevono la stessa quantità di denaro,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_2 \\
900 + \frac{S}{10} &= 1710 + \frac{9S}{100} \\
\frac{S}{100} &= 810 \\
S &= 81000
\end{aligned}
$$

Per lo stesso motivo, detto n il numero dei figli,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{S}{n} \\
900 + \frac{S}{10} &= \frac{S}{n} \\
900 + \frac{81000}{10} &= \frac{81000}{n} \\
9000 &= \frac{81000}{n} \\
n &= \frac{81000}{9000} = 9
\end{aligned}
$$

La risposta è quindi 9.

4 Domanda 4

4.1 Domanda

Gennaro scrive 2025 cifre 1 in fila. Tra ogni coppia di cifre consecutive, aggiunge un segno di addizione (+) o di moltiplicazione (×). Calcola poi il risultato dell'espressione usando l'ordine standard delle operazioni. Quanti possibili risultati potrebbe aver ottenuto?

Esempio: se anziché scrivere 2025 cifre 1 Gennaro ne scrivesse 3, alcune delle possibili operazioni sarebbero `1+1+1 = 3` e `1×1+1 = 2`.

4.2 Risposte

(A) 1013

(B) 2024

(C) 2025

(D) 2026

4.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(C) 2025`.

Consideriamo il risultato intermedio in cui Gennaro ha calcolato tutte le moltiplicazioni nell'espressione, ma nessuna addizione. I possibili casi sono tutti e soli quelli compresi tra 1, quando tutte le operazioni sono moltiplicazioni e $1 + 1 + \ldots + 1$, dove ci sono 2025 cifre 1, quando tutte le operazioni sono addizioni.
A questo punto, è evidente come i possibili risultati finali siano tutti gli interi tra 1 e 2025, che sono proprio 2025.

5 Domanda 5

5.1 Domanda

Un'insegnante d'inglese scrive 6 parole alla lavagna. Le parole sono "cat", "dog", "has", "max", "dim", "tag". Sceglie poi una parola tra quelle, scrive le tre lettere della parola su tre fogli diversi e ne consegna uno a ciascuno dei suoi studenti, Abibbo, Babibbo e Cabibbo. Quindi chiede "Abibbo, sai dirmi di che parola si tratta?". Abibbo risponde immediatamente "Sì". L'insegnante chiede ancora "Babibbo, sai dirmi di che parola si tratta?". Babibbo risponde "Sì". Infine, chiede a Cabibbo la stessa domanda, e Cabibbo risponde allo stesso modo: "Sì".
Che parola ha scelto l'insegnante?

5.2 Risposte

(A) cat

(B) tag

(C) dog

(D) dim

5.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(C) dog`.

Dal fatto che Abibbo risponde di conoscere la parola, sappiamo che la sua lettera deve comparire all'interno di una sola parola. Questo esclude dunque la parola "tag", dato che tutte le sue lettere appaiono all'interno di almeno un'altra parola. Le parole "cat", "dog", "has", "max" e "dim" rimangono invece possibili.

Babibbo, sentendo la risposta di Abibbo, sa a sua volta che la parola in questione non può essere "tag". Dal fatto che risponde di sì, sappiamo dunque che la sua lettera deve comparire in una sola parola tra "cat", "dog", "has", "max" e "dim". Valutiamo tutti i casi:

- **cat:** questa parola è possibile, nel caso in cui Abibbo avesse la "c" e Babibbo la "t".
- **dog:** questa parola è possibile, nel caso in cui Abibbo avesse la "o" e Babibbo la "g".
- **has:** questa parola è possibile, nel caso in cui Abibbo avesse la "h" e Babibbo la "s" o viceversa.
- **max:** questa parola non è possibile, perché Abibbo avrebbe dovuto avere la "x", ma sia la "m" che la "a" appaiono in altre parole diverse da "tag", quindi Babibbo non avrebbe potuto identificarla con certezza.
- **dim:** anche questa parola non è possibile, perché Abibbo avrebbe dovuto avere la "i", ma le altre due lettere compaiono in altre parole diverse da "tag".

Quindi le uniche parole possibili dopo la risposta di Babibbo sono "cat", "dog" e "has". Anche Cabibbo, sentendo le risposte di Abibbo e Babibbo, sa che le uniche parole possibili sono queste 3. Dunque dalla sua risposta sappiamo che la terza lettera deve apparire in una sola parola tra queste 3. Nel caso di "cat" e "has" abbiamo che, dal ragionamento di prima, la terza lettera dovrebbe essere la "a", ma questa compare in entrambe le parole e quindi Cabibbo non riuscirebbe a distinguere tra queste. L'unica possibilità rimanente è dunque "dog", che è quindi la risposta corretta, e le lettere date ad Abibbo, Babibbo e Cabibbo sono "o", "g" e "d", rispettivamente.

6 Domanda 6

6.1 Domanda

Considera la seguente funzione.

```
function f(x):
  i = 0
  y = 0
  while (x >> i) != 0:
    y = y << 1
    y = y | ((x >> i) & 1)
    i = i+1
  return y
```

Calcola il risultato di `f(0xb97687)`.

Nota: la scrittura `0x...` indica che il numero è scritto in base 16.

6.2 Risposte

(A) `0x78679b`

(B) `0xe16e9d`

(C) `0x8776b9`

(D) `0xb97687`

6.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(B) 0xe16e9d`

Il ciclo `while` itera sui bit di `x`, dal meno significativo al più significativo, e, uno per volta, concatena il bit corrente a `y`. La funzione `f` quindi inverte l'ordine dei bit di `x`.

Scriviamo in base 2 il numero `0xb97687`: `101110010111011010000111`. Invertendo l'ordine dei bit, otteniamo il numero `111000010110111010011101` in base 2, che corrisponde in base 16 a `0xe16e9d`.

7 Domanda 7

7.1 Domanda

Considera la seguente funzione.

```
function f(l,k):
  for i = 0,...,k-1:
    if sum(l) % 3 == 0:
      l = concat(l,l)
    for j = 0,...,len(l)-1:
      l[j] = l[j]+1
  return len(l)
```

Dove `concat(a, b)` è la funzione che concatena le due liste `a` e `b`, e `len(l)` è la funzione che calcola la lunghezza della lista `l`. Qual è il risultato di `f([1, 0, 1, 1], 1000)`?

7.2 Risposte

(A) 8

(B) 2^{336}

(C) 2^{1000}

(D) 2^{1002}

7.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(B)` 2^{336}.

Osserviamo che le uniche quantità di cui dobbiamo tenere traccia sono: L, la lunghezza di `l`; S, la somma degli elementi di `l`. Inoltre, della somma dobbiamo in realtà tenere traccia solo di $S \pmod 3$. Quando $S \equiv 0 \pmod 3$ abbiamo che la lista viene duplicata, quindi $L \to 2 \cdot L$ e $S \to 2 \cdot S$, ma $S \pmod 3$ rimane invariato. Nel ciclo `for` invece, la quantità L rimane invariata, mentre S viene incrementato esattamente di L, quindi $S \to S + L$. Notiamo però che, essendo $L = 4$ all'inizio e dato che l'unico modo in cui può variare è $L \to 2 \cdot L$, L sarà sempre una potenza di 2, quindi $L \equiv \pm 1 \pmod 3$. Osserviamo le iterazioni iniziali e teniamo traccia di S ed L all'inizio di ogni iterazione:

i	$S \pmod 3$	L
0	0	4
1	-1	8
2	-2	8
3	0	8
4	1	16
5	2	16
6	0	16

Notiamo che, ogni volta che la lista viene duplicata perch $S \equiv 0 \pmod 3$, S viene modificato diventando $\pm 1 \pmod 3$ ed occorrono altre 2 iterazioni per riottenere $S \equiv 0 \pmod 3$. Dunque abbiamo che la lista `l` viene duplicata solo quando $i \equiv 0 \pmod 3$, ovvero per $i = 0, 3, 6, \ldots, 999$, dunque 334 volte. Essendo $L = 4 = 2^2$ all'inizio, dopo le 1000 iterazioni si avrà $L = 4 \cdot 2^{334} = 2^{236}$, che è dunque il valore restituito dalla funzione.

8 Domanda 8

8.1 Domanda

Considera l'equazione l'equazione `(x ^ 1874) | 1643 = 2^12 - 1`. Quanti valori di `x` da 0 a $2^{12}-1$ la soddisfano?

Nota: l'OR bitwise, indicato da | , è l'operazione bit a bit definita dalla seguente tabella di verità, $0 \mid 0 = 0$, $1 \mid 0 = 1$, $0 \mid 1 = 1$, $1 \mid 1 = 1$.
Lo XOR bitwise, indicato da ^ , è l'operazione bit a bit definita dalla seguente tabella di verità, 0 ^ 0 = 0, 1 ^ 0 = 1, 0 ^ 1 = 1, 1 ^ 1 = 0.

8.2 Risposte

(A) `128`

(B) `256`

(C) `32`

(D) `64`

8.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(A) 128`.

Scriviamo, in base 2, 1643 come `011001101011` e $2^{12}-1$ come `111111111111`. Data la tabella di verità dell'OR bitwise, possiamo notare come i bit in posizione 1, 2, 4, 6, 7, 10, 11 (dove il bit meno significativo è in posizione 1 e il bit più significativo è in posizione 12) del risultato sono sicuramente uguali a 1, che è il risultato desiderato, a prescindere dal valore di `x`.

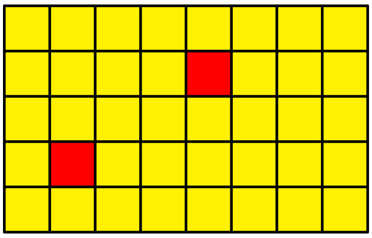
Per i bit nelle posizioni rimanenti, invece, il bit corrispondente di `(x ^ 1874)` è fissato, e quindi anche quello corrispondente di `x` (ricordiamo la proprietà dello xor bitwise per cui, se $a \oplus b = c$, allora $c \oplus b = a$).

Pertanto, considerando `x`, i bit in posizione 3, 5, 8, 9 e 12 sono fissati, mentre i 7 bit nelle posizioni rimanenti possono assumere indifferentemente sia il valore 0 che il valore 1. Il numero di possibili `x` è perciò 2^7.

9 Domanda 9

9.1 Domanda

Al Gabibbo piace tanto il colore giallo, ma detesta il rosso. Inoltre al Gabibbo piace tanto disegnare rettangoli. Nella griglia 5×8 qui sotto, quanti rettangoli ci sono che contengono al massimo un quadrato rosso?



9.2 Risposte

(A) `248`

(B) `480`

(C) `528`

(D) `508`

9.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(D) 508`.

Possiamo contare i rettangoli per differenza, come il numero totale di rettangoli presenti nella griglia meno il numero di rettangoli che contengono entrambi i quadrati rossi.

Il numero totale di rettangoli si può calcolare come il prodotto tra il numero di coppie di lati in verticale e il numero di coppie di lati in orizzontale, in quanto, per ogni possibile scelta di queste coppie, viene definito un nuovo rettangolo. Le possibili scelte di un singolo lato in verticale sono 9, mentre le possibili scelte di un singolo lato in orizzontale sono 6. Le possibili scelte per le coppie di lati saranno quindi rispettivamente $\binom{9}{2}$ e $\binom{6}{2}$. Il numero totale di rettangoli sulla griglia è perciò $\binom{9}{2}\binom{6}{2} = 540$.

Per contare il numero di rettangoli che contiene entrambi i quadrati rossi, invece, faremo un ragionamento leggermente diverso. Stavolta contiamo il numero di modi per scegliere il vertice in basso a sinistra e il numero di modi per scegliere il vertice in alto a destra. Anche stavolta, ogni possibile combinazione definisce un unico rettangolo e quindi il risultato voluto è il prodotto di questi due valori. Dalla figura, possiamo notare come il primo valore sia uguale a 4, mentre il secondo a 8. Il numero di rettangoli che contengono entrambi i quadrati rossi è pertanto $4 \cdot 8 = 32$.

Il risultato richiesto dal problema è quindi $\binom{9}{2} \cdot \binom{6}{2} - 4 \cdot 8 = 540 - 32 = 508$.

10 Domanda 10

10.1 Domanda

I 5 amici del Gabibbo scoprono un fatto interessante. Infatti, Abibbo, Babibbo, Cabibbo, Dabibbo ed Ebibbo compiono gli anni lo stesso giorno, ma hanno tutti età diverse! Il giorno del loro compleanno si incontrano e avviene la seguente conversazione:

- Dabibbo dice a Babibbo: "Ho 9 anni in più di Ebibbo"
- Ebibbo dice a Babibbo: "Ho 7 anni in più di Abibbo"
- Abibbo dice a Babibbo: "Hai esattamente il 70% in più dei miei anni"
- Babibbo dice a Cabibbo: "Sei più vecchio di Ebibbo"
- Cabibbo dice a Dabibbo: "Abbiamo 6 anni di differenza"
- Cabibbo dice a Abibbo: "Ho 10 anni in più di te"
- Cabibbo dice a Abibbo: "Dabibbo è più vecchio di Babibbo"
- Babibbo dice a Cabibbo: "La differenza di età tra te e Dabibbo è la stessa che tra Dabibbo ed Ebibbo"

Sapendo che quando una persona parla con qualcuno di più anziano dice sempre la verità, mentre quando parla con qualcuno di più giovane mente sempre, quanti anni ha Abibbo?"

10.2 Risposte

(A) `20`

(B) `30`

(C) `40`

(D) `50`

10.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(B) 30`.

Nel resto della soluzione utilizzeremo le lettere A, B, C, D, E per riferirci alle età di Abibbo, Babibbo, Cabibbo, Dabibbo ed Ebibbo, rispettivamente, e ci riferiremo alle frasi del testo come "frase 1", ..., "frase 8" nell'ordine in cui compaiono.

Osserviamo che la frase 3 e la 6 sono le uniche frasi che coinvolgono solamente le persone che stanno parlando. Prendiamo quindi in considerazione la frase 6. Se $C < A$ allora la frase deve essere vera, ma quindi si avrebbe che $C = A + 10 \Rightarrow C > A$, che è assurdo. Quindi abbiamo per forza che $C > A$. Dunque anche la frase 7 deve essere falsa, il che ci dice che $D < B$.

Da quest'ultima deduzione abbiamo che la frase 1 è vera, quindi $D = E + 9$, il che implica $B > D > E$. Dunque anche la frase 2 è vera e si ha $E = A + 7$, quindi $B > D > E > A$. Questo ci dice che anche la frase 3 è vera, e quindi i valori di E, D, B, in relazione ad A, sono:

$$
\begin{aligned}
E &= A + 7 \\
D &= A + 16 \\
B &= A + \frac{7}{10}A
\end{aligned}
$$

Rimane da considerare i casi $C > B$ e $C < B$. Supponiamo $C < B$. Allora la frase 4 è falsa e si ha $A < C < E < D < B$ e la frase 5 deve essere vera, dando $C = D - 6$. Ma dalle equazioni sopra questo vorrebbe dire che $C = A + 10 > E$, il che è assurdo.

Quindi deve essere vero che $C > B$, cioè $A < E < D < B < C$ e la frase 8 è vera, quindi $C = D + 9 = A + 25$. Dato che $C > B$, dobbiamo avere $25 > \frac{7}{10}A$, quindi $A < \frac{25 \cdot 10}{7} \sim 35$, il che esclude le soluzione 40 e 50. Infine, da $B > D$, abbiamo che $\frac{7}{10}A > 16$, quindi $A > \frac{16 \cdot 10}{7} \sim 22$, quindi l'unica risposta possibile è $A = 30$.

11 Domanda 11

11.1 Domanda

Ci sono 4 computer su un tavolo. Su tutti è installato lo stesso numero di antivirus. Ogni computer ha un post-it con scritto il numero di antivirus installati, ma solo uno di questi è corretto. I post-it dicono: "Cinque o Sei", "Sette o Otto", "Sei o Sette" e "Sette o cinque". Quanti antivirus sono installati su ogni computer?

11.2 Risposte

(A) `5`

(B) `6`

(C) `7`

(D) `8`

11.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(D) 8`.

Sappiamo che solo un post-it è corretto, quindi il numero corretto di antivirus installati compare su uno e un solo post-it (altrimenti saremmo in contraddizione). L'unico numero che non viene ripetuto è 8.

12 Domanda 12

12.1 Domanda

Ti trovi davanti ad un cifrario sconosciuto. Il cifrario `Fritto Misto` prende in input un messaggio e ci applica la seguente funzione.

```
function encrypt(m, k, len):
  m = shuffle(m)
  for i = 0,1,...,len-1:
    m[i] = chr((ord(m[i]) + k) % 26)
  return m
```

Dove `ord` è la funzione che mappa A a 0, B a 1 e così via, mentre `chr` è la sua funzione inversa e `shuffle` è una funzione che permuta in maniera casuale le lettere di `m`. Quale può essere un possibile messaggio originale `m` del messaggio cifrato `encrypt(m, k, 14) = FXIHGOFKAXIKYE` per un qualche valore di `k`?

12.2 Risposte

(A) `CYBERSICUREZZA`

(B) `MESSAGGISICURI`

(C) `CYBERCRIMINALI`

(D) `INFORMATIZZATA`

12.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(A) CYBERSICUREZZA`.

Il cifrario può essere visto come la combinazione di un cifrario a permutazione, dato dalla funzione `shuffle`, e da un cifrario a sostituzione monoalfabetica, dato dal ciclo `for`. Entrambi i cifrari hanno la particolarità di non modificare le frequenze delle lettere dei messaggi. Ci basterà quindi analizzare tali frequenze per individuare la risposta.

(A) `CYBERSICUREZZA` ha le stesse frequenze, quindi è un possibile messaggio originale

(B) `MESSAGGISICURI` ha una terna di `I`, mentre `FXIHGOFKAXIKYE` non ha terne di lettere uguali

(C) `CYBERCRIMINALI` ha una terna di `I`, mentre `FXIHGOFKAXIKYE` non ha terne di lettere uguali

(D) `INFORMATIZZATA` ha una terna di `A`, mentre `FXIHGOFKAXIKYE` non ha terne di lettere uguali

Quindi la risposta è `CYBERSICUREZZA`.