# OliCyber.IT 2024 - Selezione Scolastica
# Soluzioni commentate

## Contenuti

# 1 Domanda 1

## 1.1 Domanda

Siano $a$ e $b$ due interi positivi. Se, scritti in notazione binaria,

- `a&b = 100010100`
- `a|b = 110111110`

quanto fa `a+b`?

*Nota: l'AND bitwise, indicato da &, è l'operazione bit a bit definita dalla seguente tabella di verità,* $0\&0 = 0, 1\&0 = 0, 0\&1 = 0, 1\&1 = 1$.
*L'OR bitwise, indicato da |, è l'operazione bit a bit definita dalla seguente tabella di verità,* $0|0 = 0, 1|0 = 1, 0|1 = 1, 1|1 = 1$.

## 1.2 Risposte

(A) 722

(B) 446

(C) 170

(D) 936

## 1.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(A) 722`.

Consideriamo la somma di due bit: abbiamo che 0+0 = 0, 0+1 = 1, 1+0 = 0 e 1+1 = 0, con riporto di 1. Questa somma coincide con la somma tra AND e OR dei due valori. Estendendo il ragionamento a numeri composti da più di un bit, possiamo notare che esso è ancora valido e quindi possiamo scrivere che $a + b = (a\&b) + (a|b)$. Convertendo infine i valori iniziali in notazione decimale, otteniamo $a + b = 276 + 446 = 722$.

# 2 Domanda 2

## 2.1 Domanda

Sull'isola degli OrsiBruni ci sono 96 abitanti. I 96 abitanti dell'isola possono essere Fisici o Gabibbi. I Fisici mentono sempre, mentre i Gabibbi possono sia mentire che dire la verità. I 96 abitanti si riuniscono intorno a un tavolo rotondo e ognuno di loro afferma di essere seduto tra un Fisico e un Gabibbo. Sapendo che esattamente due Gabibbi hanno mentito, quanti Fisici sono al tavolo?

## 2.2 Risposte

(A) 0

(B) 31

(C) 32

(D) 64

## 2.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(C) 32`.

Se tutti i Gabibbi dicessero la verità allora la configurazione, indicando con $F$ la presenza di un Fisico e con $G$ quella di un Gabibbo, sarebbe ...$FGGFGGFGG$... e il numero di Fisici sarebbe 32.
Quando un Gabibbo mente vuol dire che si deve trovare

1. o tra due Fisici ($F\mathbf{G}F$)
2. o tra due Gabibbi ($G\mathbf{G}G$).

Nel primo caso si "perde" un Gabibbo rispetto alla configurazione originale, mentre nel secondo se ne "guadagna" uno. Dato che il numero totale di Gabibbi e Fisici è multiplo di 3, vuol dire che ci deve essere una configurazione del tipo (1) e una del tipo (2). Quindi il numero di Fisici è comunque 32.

# 3 Domanda 3

## 3.1 Domanda

La sera prima delle finali di OliCyber.IT 2024 ci sarà un grande torneo di challenge. I 256 finalisti, che si scontreranno in duelli a eliminazione diretta, sono stati classificati in base alla loro capacità, in modo tale che il finalista 1 sia quello più forte e il finalista 256 quello più debole. Durante una sfida, il finalista più forte tra i due vince sempre con probabilità $\dfrac{3}{5}$.

Il primo round del torneo vedrà scontrarsi il finalista 1 contro il finalista 2, il finalista 3 contro il finalista 4, e così via. In maniera simile, al secondo round si sfideranno i vincitori degli scontri 1-2 e 3-4, quelli degli scontri 5-6 e 7-8, e così via.

Proseguendo in questo modo fino alla definizione del vincitore, qual è la probabilità che costui abbia numero dispari?

## 3.2 Risposte

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{3}{5}$

## 3.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(D)` $\frac{3}{5}$.

Sia $p_i$ la probabilità che vinca l'$i$-esimo finalista e siano $p_d = p_1 + p_3 + \ldots + p_{255}$ e $p_p = p_2 + p_4 + \ldots p_{256}$ le probabilità che vinca un finalista dispari o un finalista pari, rispettivamente. Chiamiamo inoltre $p'_i$ la probabilità che il finalista $i$-esimo vinca se ha già vinto il primo round. Notiamo che $p'_1 = p'_2$, $p'_3 = p'_4$ e così via, dato che una volta superato il primo round avranno la stessa posizione rispetto agli altri finalisti rimasti in gara.

Quindi

$$p_1 = \frac{3}{5} \cdot p'_1 \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{2}{5} \cdot p'_2 = \frac{2}{5} \cdot p'_1 = \frac{2}{3} \cdot p_1.$$

Allora:

$$p_p = p_2 + p_4 + \ldots p_{256} = \frac{2}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_3 + \ldots + \frac{2}{3}p_{255} = \frac{2}{3}p_d.$$

Dato che $p_d + p_p = 1$, si ha $p_d + \frac{2}{3}p_d = \frac{5}{3}p_d = 1 \Rightarrow p_d = \frac{3}{5}$.

# 4 Domanda 4

## 4.1 Domanda

Considera la seguente funzione:

```
function f(x):
    if x <= 0:
        return x
    else:
        return f(x-1) - f(x-2)
```

Quante volte viene chiamata la funzione `f` per calcolare `f(20)`?

## 4.2 Risposte

(A) 17711

(B) 35421

(C) 1048576

(D) 20

## 4.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(B) 35421`.

Considero la funzione $g(x)$ definita come:

$$\begin{cases} g(x) = 1, & \text{se } x \leq 0 \\ g(x) = 1 + g(x-1) + g(x-2) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione $g(x)$ calcola proprio la quantità richiesta, quindi ci basta calcolare $g(20)$. A questo punto, possiamo calcolare ricorsivamente $g(20)$ oppure scrivere i primi valori ($g(0) = 1$, $g(1) = 3$, $g(2) = 5$, $g(3) = 9, \ldots$) e notare che $g(x) = 2 \cdot Fib(x+1) - 1$, dove $Fib(x)$ è l'$x$-esimo numero di Fibonacci ($1, 1, 2, 3, 5, \ldots$). A questo punto, possiamo calcolare $g(20) = 2 \cdot Fib(21) - 1 = 35421$.

# 5 Domanda 5

## 5.1 Domanda

Abbiamo 2023 carte numerate da 1 a 2023. Il Gabibbo vuole prenderne un po' in modo che nessuna tra le carte scelte sia il triplo di un'altra carta scelta. Quante carte può prendere al massimo?

## 5.2 Risposte

(A) 1012

(B) 1517

(C) 1349

(D) 1499

## 5.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(B) 1517`.

Per evitare di prendere una carta tripla dell'altra, possiamo prendere tutte le carte che non sono multiple di 3. In questo modo è impossibile avere il triplo di una carta già presa. Abbiamo quindi $\left\lceil \frac{2 \cdot 2023}{3} \right\rceil = 1349$ carte.
Tra i multipli di 3, però, possiamo ancora selezionare i multipli di 9, ma non di 27, in modo da continuare a non prendere una carta che vale il triplo di un'altra. I multipli di 9 rimanenti sono $\left\lfloor \frac{2023}{9} \right\rfloor = 224$ e le carte appena descritte sono $\left\lceil \frac{2 \cdot 224}{3} \right\rceil = 150$.
Ripetendo ancora il ragionamento con i multipli di 81, ma non di 243, e successivamente con i multipli di 729 ma non di 2187, otteniamo ancora 16 e 2 carte, rispettivamente, esaurendo le possibilità.
In totale, avremo scelto $1349 + 150 + 16 + 2 = 1517$ carte.

# 6 Domanda 6

## 6.1 Domanda

Nella scuola del Gabibbo gli studenti iniziano a prepararsi alle Olimpiadi di Cybersicurezza a Squadre! Purtroppo, il laboratorio della scuola non è molto fornito e gli studenti devono condividere i computer. Sappiamo che se ogni computer è usato da 2 persone, allora rimangono 3 studenti senza computer. Se invece ogni computer è usato da esattamente 3 persone, rimangono 3 computer non utilizzati (e nessuno studente senza computer). Quanti sono gli studenti che si stanno allenando?

## 6.2 Risposte

(A) 32

(B) 27

(C) 20

(D) 15

## 6.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(B) 27`.

Indichiamo con $s$ il numero di studenti e con $c$ il numero di computer nella scuola. Le condizioni imposte dal problema si possono esprimere come

$$\begin{cases} s = 2 \cdot c + 3 \\ s = 3 \cdot (c - 3) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene

$$\begin{cases} s = 27 \\ c = 12 \end{cases}$$

# 7 Domanda 7

## 7.1 Domanda

Alcuni interi speciali si dicono "Gabibbosi". Un intero $x \geq 10$ è Gabibboso se la sua cifra più significativa è pari e tutte le sue cifre sono ordinate in modo strettamente crescente. Per esempio 2359 è Gabibboso, mentre 1234, 2334, 4345 e 6 non lo sono. Quanti sono i numeri Gabibbosi?

## 7.2 Risposte

(A) 336

(B) 94

(C) 212

(D) 166

## 7.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(D) 166`.

La prima cifra deve essere una tra 2, 4, 6, 8 ed, essendo $x \geq 10$, ci deve essere almeno un'altra cifra. Per ogni scelta della cifra più significativa, possiamo quindi scegliere una o più cifre maggiori della prima, ed, essendo ordinate in maniera crescente, ogni scelta delle cifre che compariranno definirà in maniera univoca il numero $x$. Se la cifra più significativa scelta è 2, allora abbiamo 7 cifre rimanenti tra cui scegliere, per un totale di $2^7 - 1$ valori possibili di $x$ (ricordiamo che l'insieme vuoto non è una scelta valida). Allo stesso modo, con 4, 6, 8 avremo rispettivamente $2^5 - 1$, $2^3 - 1$, $2^1 - 1$ per un totale di $2^7 - 1 + 2^5 - 1 + 2^3 - 1 + 2^1 - 1 = 166$.

# 8 Domanda 8

## 8.1 Domanda

Abibbo, Babibbo e Cabibbo diventano i nuovi autori delle challenge di OliCyber.IT! Abibbo ne scrive una in 3 minuti, Babibbo in 4 minuti e Cabibbo in 5.
Ogni minuto, viene assegnata una challenge ad uno di essi secondo le seguenti regole:

- Se uno tra Abibbo, Babibbo e Cabibbo è libero, viene assegnata al primo libero in ordine alfabetico
- Altrimenti la challenge diventa compito di Abibbo.

Dopo 2000 minuti, quante challenge dovrà ancora scrivere Abibbo?

*Nota: nell'istante in cui un autore termina una challenge, viene considerato libero. Pertanto, può ricevere una nuova challenge immediatamente.*

## 8.2 Risposte

(A) 434

(B) 475

(C) 459

(D) 428

## 8.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(C) 459`.

Scriviamo per i casi piccoli ad ogni minuto a chi viene assegnata la challenge.

| Minuto | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | x | 0 | 0 |
| 2 | 0 | x | 0 |
| 3 | 0 | 0 | x |
| 4 | x | 0 | 0 |
| 5 | x | 0 | 0 |
| 6 | 0 | x | 0 |
| 7 | x | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | x |

| Minuto | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 9 | x | 0 | 0 |
| 10 | 0 | x | 0 |
| 11 | x | 0 | 0 |
| 12 | x | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | x |
| 14 | 0 | x | 0 |
| 15 | x | 0 | 0 |
| 16 | x | 0 | 0 |

| Minuto | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 17 | x | 0 | 0 |
| 18 | 0 | x | 0 |
| 19 | 0 | 0 | x |

Notiamo che dopo 16 minuti la configurazione si ripete uguale all'inizio e quindi le challenge verranno assegnate allo stesso modo. Nei primi 16 minuti 7 challenge sono state assegnate a Babibbo e Cabibbo, quindi in totale a loro verranno assegnate $2000/16 \cdot 7 = 875$ challenge nei 2000 minuti. Ad Abibbo verranno assegnate le restanti $2000 - 875 = 1125$ challenge.
Dato che Abibbo ne scrive una ogni 3 minuti e non si ritrova mai senza challenge da scrivere, alla fine dei 2000 minuti ne avrà già scritte $\left\lfloor \frac{2000}{3} \right\rfloor = 666$. Quindi in totale gli rimarranno da scrivere $1125 - 666 = 459$ challenge.

# 9 Domanda 9

## 9.1 Domanda

Considera il seguente cifrario:

```
function encrypt(l):
    for i from 0 to 3:
        for j from i to 3:
            tmp = l[4*i + j]
            l[4*i + j] = l[4*j + i]
            l[4*j + i] = tmp
    return l
```

Qual è il risultato della cifratura di `"crocetteolicyber"`?

## 9.2 Risposte

(A) `"ceoyrtlbotiececr"`

(B) `"rebyciloettecorc"`

(C) `"celrbttecoyerioc"`

(D) `"corcetteciloreby"`

## 9.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(A) "ceoyrtlbotiececr"`.

Il cifrario corrisponde a scrivere il messaggio in una matrice $4 \times 4$ e farne la trasposta. Quindi, scrivendo il messaggio "crocetteolicyber" in una matrice abbiamo:

$$\begin{bmatrix} c & r & o & c \\ e & t & t & e \\ o & l & i & c \\ y & b & e & r \end{bmatrix}$$

Facendo la trasposta otteniamo

$$\begin{bmatrix} c & e & o & y \\ r & t & l & b \\ o & t & i & e \\ c & e & c & r \end{bmatrix}$$

che corrisponde al messaggio "ceoyrtlbotiececr".

# 10 Domanda 10

## 10.1 Domanda

Considera la seguente funzione:

```
function f(x):
    if x < 0:
        x -= 2*x
        return f(x)
    if x < 99:
        return x
    x -= 99
    return f(x)
```

Qual è il risultato di `f(-1333333333333333333337)` (dove compaiono venti cifre 3)?

## 10.2 Risposte

(A) 83

(B) 50

(C) 33

(D) 40

## 10.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(B) 50`.

La funzione $f(x)$ è equivalente a $\text{abs}(x) \pmod{99}$, con $\text{abs}(x)$ la funzione di valore assoluto. A questo punto, dobbiamo calcolare $1333333333333333333337 \pmod{99}$. Notiamo che $x \pmod{99}$ equivale alla somma delle coppie di cifre (partendo da destra), modulo 99.
Quindi $1333333333333333333337 \pmod{99} \equiv 13 + 18 \cdot 33 + 37 \pmod{99} \equiv 644 \pmod{99} \equiv 50 \pmod{99}$.

# 11 Domanda 11

## 11.1 Domanda

Abibbo e Babibbo hanno appena conosciuto Cabibbo e vogliono scoprire quando è il suo compleanno. Cabibbo dà loro una lista di 10 possibilità:

15 Maggio, 16 Maggio, 19 Maggio, 17 Giugno, 18 Giugno, 14 Luglio, 16 Luglio, 14 Agosto, 15 Agosto, 17 Agosto.

Cabibbo dice poi, separatamente, ad Abibbo il mese e a Babibbo il giorno di nascita.
**Abibbo**: "Non so quando sia il compleanno di Cabibbo, ma so che neanche Babibbo lo sa."
**Babibbo**: "Prima non sapevo quando fosse il compleanno, ma ora lo so."
**Abibbo**: "Allora adesso lo so anche io."

Quando è il compleanno di Cabibbo?

## 11.2 Risposte

(A) 15 Agosto

(B) 15 Maggio

(C) 17 Giugno

(D) 16 Luglio

## 11.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(D) 16 Luglio`.

Dato che Abibbo è sicuro che Babibbo non conosca la risposta, il compleanno deve essere in un mese tale che tutti i giorni possibili tra quelli dati da Cabibbo compaiano anche in un altro mese. Ad esempio, se il mese fosse Maggio, il giorno potrebbe essere il 19, ma dato che questo giorno compare solo con il mese di Maggio, Babibbo saprebbe subito la risposta. Quindi gli unici mesi possibili sono Luglio ed Agosto.
Anche Babibbo ora sa che gli unici mesi possibili sono Luglio ed Agosto, quindi il fatto che ora conosca la risposta ci dice che il giorno non può essere il 14, dato che compare in entrambi i mesi. Quindi le uniche opzioni rimaste sono 16 Luglio, 15 Agosto e 17 Agosto.
Dato che Abibbo ora è sicuro del giorno, vuol dire che il mese è Luglio (se fosse Agosto, Abibbo non potrebbe distinguere tra il 15 e il 17). Quindi la risposta è 16 Luglio.

# 12 Domanda 12

## 12.1 Domanda

Consideriamo l'equazione l'equazione `(x^3471) & 1121 = 0`.
Quanti valori di $x$ da 0 a $2^{12} - 1$ la soddisfano?

*Nota: l'AND bitwise, indicato da &, è l'operazione bit a bit definita dalla seguente tabella di verità,* $0\&0 = 0, 1\&0 = 0, 0\&1 = 0, 1\&1 = 1$.
*Lo XOR bitwise, indicato da ^, è l'operazione bit a bit definita dalla seguente tabella di verità,* $0 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 0 = 1$, $0 \wedge 1 = 1$, $1 \wedge 1 = 0$.

## 12.2 Risposte

(A) $2^{12}$

(B) 1

(C) 16

(D) 256

## 12.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è `(D) 256`.

Poiché l'ultima operazione fatta è un AND bit a bit, vogliamo che il risultato di `(x^3471)` abbia a 0 tutti i bit corrispondenti ai bit 1 di 1121. Invece, nei bit corrispondenti agli 0 di 1121, `(x^3471)` può avere qualsiasi valore. Quindi, dato che 1121 in binario è `010001100001` (espanso a 12 bit) e ha 8 bit a 0, abbiamo $2^8 = 256$ valori possibili per `(x^3471)`. Dato che lo XOR bit a bit è un'operazione reversibile, ad ognuno di questi corrisponde uno e un solo valore per $x$, che sono quindi 256.