

OliCyber.IT 2023 - Selezione Scolastica

Soluzioni commentate

Contenuti

1 Domanda 1	3
1.1 Domanda	3
1.2 Risposte	3
1.3 Soluzione proposta	3
2 Domanda 2	4
2.1 Domanda	4
2.2 Risposte	4
2.3 Soluzione proposta	4
3 Domanda 3	5
3.1 Domanda	5
3.2 Risposte	5
3.3 Soluzione proposta	5
4 Domanda 4	6
4.1 Domanda	6
4.2 Risposte	6
4.3 Soluzione proposta	6
5 Domanda 5	7
5.1 Domanda	7
5.2 Risposte	7
5.3 Soluzione proposta	7
6 Domanda 6	8
6.1 Domanda	8
6.2 Risposte	8
6.3 Soluzione proposta	8
7 Domanda 7	9
7.1 Domanda	9
7.2 Risposte	9
7.3 Soluzione proposta	9
8 Domanda 8	10
8.1 Domanda	10
8.2 Risposte	10
8.3 Soluzione proposta	10
9 Domanda 9	11
9.1 Domanda	11
9.2 Risposte	11
9.3 Soluzione proposta	11

10 Domanda 10	12
10.1 Domanda	12
10.2 Risposte	12
10.3 Soluzione proposta	12
11 Domanda 11	13
11.1 Domanda	13
11.2 Risposte	13
11.3 Soluzione proposta	13
12 Domanda 12	14
12.1 Domanda	14
12.2 Risposte	14
12.3 Soluzione proposta	14

1 Domanda 1

1.1 Domanda

32 finalisti di OliCyber.IT hanno risolto tra le 10 e le 12 challenge a testa. Sappiamo che tutti quelli che ne hanno risolte esattamente 11 mentono sempre, mentre chi ne ha risolte 10 o 12 dice sempre la verità. I partecipanti dicono rispettivamente:

- In totale abbiamo risolto 321 challenge.
- In totale abbiamo risolto 322 challenge.
- ...
- In totale abbiamo risolto 351 challenge.
- In totale abbiamo risolto 352 challenge.

Quante challenge sono state effettivamente risolte in totale?

1.2 Risposte

- (A) 351
- (B) 321
- (C) 322
- (D) 352

1.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (A) 351.

Osserviamo che almeno un finalista dice la verità: infatti, se tutti mentissero, allora le challenge risolte sarebbero $32 \cdot 11 = 352$, e quindi l'ultimo a parlare avrebbe detto la verità.

Allo stesso tempo, al massimo un finalista dice la verità, in quanto dicono tutti numeri diversi riferendosi alla stessa quantità.

Il numero di challenge risolte è quindi $31 \cdot 11 + 10 = 351$ oppure $31 \cdot 11 + 12 = 353$. Solo la prima opzione è stata effettivamente pronunciata ed è quindi quella corretta.

2 Domanda 2

2.1 Domanda

Mattia, dopo aver subito numerosi furti di account, decide di cambiare la password del suo account di OliCyber.IT. La nuova password è lunga 7 caratteri, con 5 lettere maiuscole e 2 caratteri speciali (i caratteri speciali consentiti sono 7: !"#\$%^&?^). Purtroppo però, subito dopo averla cambiata, Mattia dimentica la nuova password. Quanti tentativi deve fare al massimo per accedere nuovamente al suo account?

2.2 Risposte

- (A) $2^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13^5$
- (B) $2^5 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 13^5$
- (C) $2^3 \cdot 7^3 \cdot 13^5$
- (D) $2^3 \cdot 7^3 \cdot 13^3$

2.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (B) $2^5 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 13^5$.

Dividiamo la soluzione in due step: contiamo il numero di modi in cui si possono distribuire le due tipologie di caratteri e poi il numero di modi di scegliere i caratteri veri e propri.

Indichiamo con M le lettere maiuscole e con S i caratteri speciali. Allora possiamo definire la tipologia dei vari caratteri in un numero di modi uguale al numero di anagrammi della parola $MMMMMSS$. Tali anagrammi sono $\binom{7}{5}$.

Ogni M può assumere 26 valori, mentre ogni S può assumerne 7. Pertanto, ogni permutazione di $MMMMMSS$ può assumere $26^5 \cdot 7^2$ valori.

Combinando i due step, otteniamo che il numero di tentativi necessari è

$$\binom{7}{5} \cdot 26^5 \cdot 7^2$$

che si fattorizza in

$$2^5 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 13^5.$$

3 Domanda 3

3.1 Domanda

2023 ragazzi, tutti con altezze differenti, sono disposti in cerchio. Ognuno può dire di essere più alto o più basso di entrambi i suoi vicini, oppure che la sua altezza si trova nel mezzo. Se esattamente 42 hanno detto di essere più alti di entrambi i vicini, al massimo in quanti possono aver detto di avere un'altezza intermedia?

3.2 Risposte

- (A) 1981
- (B) 1604
- (C) 1968
- (D) 1939

3.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (D) 1939.

Notiamo che tra due persone consecutive, tra quelle che hanno detto di essere più alte di entrambi i loro vicini, necessariamente ne esiste una (e solo una) che ha detto di essere più bassa di entrambi i suoi vicini.

Questo ci permette di dire che, se 42 persone dicono di essere più alte dei vicini, allora esattamente 42 dicono di essere più basse di entrambi i vicini. Tutti gli altri invece avranno un'altezza intermedia e il loro numero è $2023 - 42 - 42 = 1939$.

4 Domanda 4

4.1 Domanda

La macchina FrittoMisto è un'invenzione rivoluzionaria che può modificare stringhe di zeri e di uni. Essendo ancora un prototipo, le azioni che può compiere sono limitate a:

- Aggiungere una sequenza di zeri in una qualsiasi posizione della stringa da trasformare
- Togliere una sequenza di zeri in una qualsiasi posizione della stringa da trasformare
- Aggiungere una sequenza del tipo 100...001 in una qualsiasi posizione della stringa da trasformare
- Togliere una sequenza del tipo 100...001 in una qualsiasi posizione della stringa da trasformare

Inoltre, la macchina può applicare diverse azioni in sequenza per ottenere modifiche più complesse. Quale di queste stringhe potrebbe essere il risultato della modifica della stringa 11111100111?

4.2 Risposte

- (A) 100000100001
- (B) 100000011111
- (C) 11111110010
- (D) 100000000111

4.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (A) 100000100001.

Notiamo che nessuna delle 4 operazioni cambia la parità del numero di cifre 1 presenti nella stringa iniziale. Infatti, le prime due operazioni non cambiano il numero di cifre 1, mentre la terza e la quarta rispettivamente lo aumentano e lo diminuiscono di 2, non cambiandone la parità.

Consideriamo la stringa 11111100111. Essa contiene 9 volte la cifra 1. L'unica altra stringa tra le opzioni possibili con un numero dispari di cifre 1 è 100000100001. Essa si può facilmente costruire cancellando la sottosequenza 1001 dalla stringa binaria di partenza, e poi cancellando sottosequenze del tipo 11 fino ad arrivare a ottenere 1. Da questo punto si può formare la stringa desiderata in due step.

5 Domanda 5

5.1 Domanda

Condideriamo la seguente funzione:

```
function f(n):  
    if(n == 1):  
        return 8  
    if(n == 2):  
        return 11  
    return 3*f(n-1) - 2*f(n-2)
```

Cosa calcola $f(1000)$?

5.2 Risposte

- (A) $5 + 3 \cdot 2^{1000}$
- (B) $5 + 2 \cdot 3^{999}$
- (C) $5 + 2 \cdot 3^{1000}$
- (D) $5 + 3 \cdot 2^{999}$

5.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (D) $5 + 3 \cdot 2^{999}$.

Il valore ritornato da $f(n)$ può essere descritto dalla formula $f(n) = 5 + 3 \cdot 2^{n-1}$.

Infatti, se $n = 1$ o $n = 2$, allora sia la funzione che la formula assumono gli stessi valori ($5 + 3 \cdot 2^0 = 8$ e $5 + 3 \cdot 2^1 = 11$).

Altrimenti, verifichiamo che $f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2)$ per sostituzione, ottenendo:

$$\begin{aligned}5 + 3 \cdot 2^{n-1} &= 3 \cdot (5 + 3 \cdot 2^{n-2}) - 2 \cdot (5 + 3 \cdot 2^{n-3}) \\ &= 15 + 9 \cdot 2^{n-2} - 10 - 6 \cdot 2^{n-3} \\ &= 5 + 18 \cdot 2^{n-3} - 6 \cdot 2^{n-3} \\ &= 5 + 12 \cdot 2^{n-3} \\ &= 5 + 3 \cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

L'equivalenza tra la formula e la funzione è quindi verificata, pertanto possiamo scrivere $f(1000) = 5 + 3 \cdot 2^{999}$.

6 Domanda 6

6.1 Domanda

Data la seguente funzione che prende in input due numeri interi x e y :

```
function f(x, y):  
    if(y == 0):  
        return 0  
    else if (y > 0):  
        return f(x, y-1) + x  
    else:  
        return f(x, y+1) - x
```

A cosa è equivalente la funzione f ?

6.2 Risposte

- (A) $x + y$
- (B) $x * y$
- (C) $x ^ y$
- (D) $x + 2y$

6.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (B) $x * y$.

La funzione f chiama se stessa ricorsivamente finché y non è zero, e ad ogni chiamata sottrae (resp. aggiunge) 1 da y e aggiunge (resp. sottrae) x al risultato. Questo significa che il risultato è x sommato (resp. sottratto) un numero di volte pari al valore assoluto di y , quindi la funzione calcola il valore $x * y$.

7 Domanda 7

7.1 Domanda

Quale dei seguenti messaggi cifrati può essere il risultato di un cifrario a permutazione applicato al messaggio CHALLENGE?

7.2 Risposte

- (A) ALELHENEG
- (B) CLEGNLAEH
- (C) EENCGPLHA
- (D) LEELHGACL

7.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (B) CLEGNLAEH.

In un cifrario a permutazione, le lettere del messaggio vengono permutate (cioè scambiate di posto) ma non modificate. Questo vuol dire in particolare che il numero di occorrenze di ogni lettera non cambia. Ciò è sufficiente a determinare la risposta corretta, in quanto nell'alternativa (A) manca la lettera C, nell'alternativa (C) è presente una sola L e nell'alternativa (D) ce ne sono 3.

8 Domanda 8

8.1 Domanda

Consideriamo la seguente funzione di cifratura:

```
function encrypt(m, k):  
    res = ''  
    for i = 0 to len(m):  
        res = res + chr((25 - ord(m[i]) + k) % 26)  
    return res
```

Dove `ord` è la funzione che mappa A a 0, B a 1 e così via, mentre `chr` è la sua funzione inversa.

Sapendo che il risultato di `encrypt(secret, x)` per un qualche intero x è QYKKCWWUOKYWLYJO, qual è il valore di `secret`?

8.2 Risposte

- (A) HACKERETICOBUONO
- (B) MESSAGGIOSEGRETO
- (C) MISSIONEOLICYBER
- (D) CIFRATURASEGRETA

8.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (B) MESSAGGIOSEGRETO. La funzione nel testo sta semplicemente ruotando le lettere dell'alfabeto, lasciandone invariata la posizione nel risultato della cifratura. In particolare, durante la cifratura vengono mantenute le doppie. Siccome il testo cifrato contiene due doppie (KK e WW), l'unica alternativa possibile è la (B).

9 Domanda 9

9.1 Domanda

Abibbo, Babibbo e Cabibbo si confrontano sui risultati della selezione scolastica. Cabibbo mostra ad Abibbo e Babibbo l'esito della sua prova, mentre Abibbo e Babibbo non lo mostrano a nessuno.

Abibbo dice "non sono stato io a risolvere il minor numero di problemi", mentre Babibbo dice "non sono stato io a risolvere il maggior numero di problemi".

Se ordiniamo Abibbo, Babibbo e Cabibbo per numero di problemi risolti (in ordine decrescente), che ordinamento otteniamo?

9.2 Risposte

- (A) Abibbo, Cabibbo, Babibbo
- (B) Abibbo, Babibbo, Cabibbo
- (C) Babibbo, Cabibbo, Abibbo
- (D) Cabibbo, Abibbo, Babibbo

9.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (A) Abibbo, Cabibbo, Babibbo.

Dalle due affermazioni si deduce che Abibbo ha risolto più problemi di Cabibbo, mentre Babibbo ne ha risolti meno. Pertanto l'unico ordinamento possibile è quello dell'opzione (A).

10 Domanda 10

10.1 Domanda

La Gabibbo Corp. ha assunto 25 nuovi hacker. Tra questi, ci sono gli apprendisti, che non sono riusciti a compromettere nessun server, i junior, che hanno compromesso un solo server a testa, e i senior, che hanno compromesso due server a testa. Da bravi professionisti, una volta infiltrati, gli hacker fanno in modo di bloccare ulteriori intromissioni, cosicché nessun server possa essere violato da più di un hacker. Se il numero di server a cui i nuovi hacker hanno accesso è 17, quanti apprendisti in più rispetto ai senior ci sono?

10.2 Risposte

- (A) 10
- (B) 8
- (C) 6
- (D) 7

10.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (B) 8.

Indichiamo con a gli apprendisti, con j i junior e con s i senior. Le condizioni del problema si possono esprimere come

$$a + j + s = 25 \tag{1}$$

e

$$0 \cdot a + 1 \cdot j + 2 \cdot s = 17 \tag{2}$$

mentre la richiesta consiste nel calcolare il valore di $a - s$.

Notiamo che sottraendo il primo membro di (2) a (1) otteniamo esattamente $a - s$, quindi possiamo scrivere $a - s = 25 - 17 = 8$.

11 Domanda 11

11.1 Domanda

Un vettore contiene i valori $[1,2,3,\dots,2023]$. Consideriamo il seguente algoritmo:

- Scegliamo a caso un intero positivo k tra 1 e 2^{1000}
- Per k volte:
 - scelgo a caso un valore $1 \leq i \leq 2023$
 - disponiamo in ordine inverso i primi i numeri
 - disponiamo in ordine inverso i restanti $2023 - i$

Per esempio, se consideriamo $i = 3$, al primo step il vettore si trasforma in $[3,2,1,2023,2022,2021,\dots,5,4]$. Quanti sono i possibili risultati che si possono ottenere al variare delle scelte casuali di k e i ?

11.2 Risposte

- (A) 2^{1000}
- (B) 2023
- (C) 4046
- (D) 8092

11.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (C) 4046.

Consideriamo i numeri posti in cerchio: un'iterazione del ciclo è equivalente a una rotazione seguita da una riflessione. Pertanto i numeri è come se rimanessero sempre ordinati, semplicemente ruotati e cambiati di verso. Ci sono 2 versi possibili e 2023 rotazioni, quindi la risposta è $2 \cdot 2023 = 4046$.

12 Domanda 12

12.1 Domanda

Scotty e il Gabibbo decidono di imbrogliare durante la prova di ammissione ad OliCyber.IT, aiutandosi a svolgere i conti. Ognuno ha bene in mente i passaggi che deve svolgere e li esegue nell'ordine corretto, ma, presi dalla foga scrivono sullo stesso foglio di brutta. L'effetto è che i calcoli sono influenzati dall'ordine in cui i ragazzi si alternano. Le operazioni che i due svolgono sono:

	Scotty	Gabibbo
Step 1	$x = x - 6$	$x = x - 1$
Step 2	$x = x \cdot 5$	$x = x \cdot 3$
Step 3	$x = x - 6$	$x = x - 1$
Step 4	$x = x \cdot 5$	$x = x \cdot 3$

Inoltre, il valore iniziale di x è 7. Tra tutti i valori di x ottenuti al variare dei possibili modi di alternarsi dei ragazzi, quanto vale il minimo?

Nota: chiamando con $S_1, S_2, \dots, G_1, G_2, \dots$ i calcoli di Scotty e del Gabibbo, un possibile ordinamento è $S_1 S_2 G_1 S_3 S_4 G_2 G_3 G_4$, mentre non lo è $S_1 G_2 G_3 S_2 G_1 S_3 G_4 S_4$ poiché G_1 non è il primo calcolo del Gabibbo.

12.2 Risposte

- (A) -105
- (B) -273
- (C) -290
- (D) -285

12.3 Soluzione proposta

La risposta corretta è (D) -285.

Intuitivamente, per ottenere il minimo valore possibile, vogliamo iniziare con entrambe le due sottrazioni in modo da avere come risultato parziale 0 e non un numero positivo (che con una successiva moltiplicazione aumenterebbe).

A questo punto è inutile usare entrambe le moltiplicazioni; la scelta migliore è quella di "sacrificare" la moltiplicazione per 5 in modo da poter ottenere -6 e poi -18, invece di moltiplicare per 3 e ottenere prima -1 e poi -5.

Infine, la scelta rimanente è tra:

- moltiplicare per 15, sottrarre 1 e moltiplicare per 3
- moltiplicare per 3, sottrarre 1 e moltiplicare per 15

Chiaramente, la scelta migliore è quella di moltiplicare per 15 alla fine. Abbiamo quindi che una delle possibili successioni ottimali è $S_1 G_1 S_2 S_3 G_2 G_3 S_4 G_4$, con cui si ottiene il valore -285.